

*Quali strategie  
didattiche e strumenti  
compensativi  
favoriscono  
l'apprendimento della  
matematica?*

**A cura di: Pamela Cappellazzi**



Non sai quanto sei fortunato, uccello, a non dover studiare matematica.



«Non spaventarti delle difficoltà che incontri in matematica,

ti posso assicurare che le mie sono ancora più grosse» (Albert Einstein)

# Disturbo o difficoltà?

Utilizzando le parole della dott. Daniela Lucangeli, professore ordinario di Psicologia dello Sviluppo, Università di Padova:

“per **difficoltà di apprendimento** si intendono tipologie di problematiche scolastiche che possono impedire, ostacolare o semplicemente rallentare il normale processo dell’apprendere”.

Non sono dunque difficoltà associabili a patologie, ma riguardano sia lo studente (caratteristiche della personalità, stile di vita, motivazione) che il contesto (caratteristiche socioculturali dell’ambiente, aspetti familiari, qualità dell’istituzione scolastica).

Altra cosa invece sono i:

**“disturbi specifici dell’apprendimento”**, che, nella quasi totalità dei casi, sono di natura congenita e che **“rappresentano una sorta di elemento costitutivo che accompagna il bambino fin dalle prime fasi del suo apprendimento”**.

In questo caso il bambino **“deve acquisire nuove abilità, come lettura, scrittura e calcolo, partendo da un assetto neuropsicologico che non favorisce l’apprendimento naturale di quei costrutti”**.

**Gli obiettivi della rieducazione e dell’intervento sono necessariamente differenti.**

# RIASSUMENDO:

## DIFFICOLTA'

I ragazzi che hanno **difficoltà** possono:

- attraversare fasi transitorie,
- presentare ritardi nelle acquisizioni di competenze,
- risentire dell'inefficacia dei metodi d'insegnamento,
- migliorare sensibilmente con trattamenti mirati.

## DISTURBO

I ragazzi che hanno **disturbo** presentano:

- intelligenza generale nella norma,
- assenza di deficit neurologici e sensoriali,
- frequenza scolastica e istruzione adeguata
- i trattamenti mirati producono miglioramenti con maggiore difficoltà.

# Quando si parla di DISCALCULIA?

*Se si ha a che fare con un “Disturbo specifico dell’apprendimento, in assenza di ritardo mentale o altre patologie neurologiche, con compromissione del calcolo.”*

Quindi difficoltà col concetto di numero, di memorizzazione di fatti aritmetici, calcolo non accurato e fluente e difficoltà nel ragionamento matematico corretto.

(dal DSM-5, *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*, è un manuale diagnostico tra i più utilizzati da medici, psichiatri e psicologi di tutto il mondo, sia nella pratica clinica che nell'ambito della ricerca)

# Quando ci si accorge che un bambino presenta un disturbo delle abilità matematiche?

In genere ci si accorge all'ingresso alla scuola primaria. Il problema però risale ad un periodo anteriore e potrebbe essere individuato anche attraverso dei segnali già alla scuola dell'infanzia.

Il consiglio è quindi quello di inviare quanto prima i bambini ai servizi perché si possa mettere correttamente a fuoco il problema.



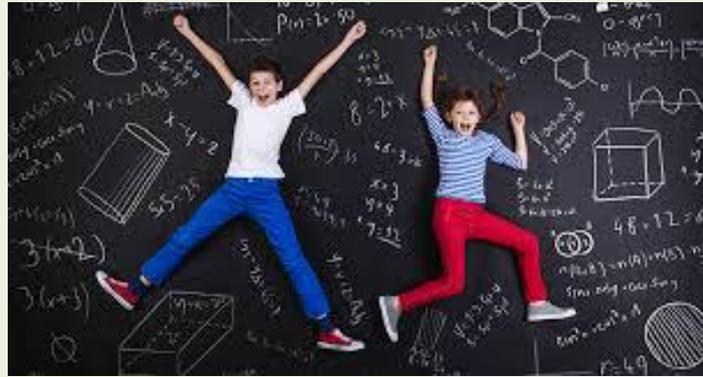
# E' possibile diagnosticare la discalculia già alla Scuola dell'Infanzia?



Si possono però mettere in atto delle strategie di potenziamento delle abilità matematiche di base dopo aver approfondito la conoscenza dei processi che non funzionano come dovrebbero (classificazione, seriazione, riordino di sequenze, confronto di quantità...) attraverso la somministrazione di batterie di Test appositi.

**La segnalazione di un sospetto va fatta quanto prima.**

# Allora quando è opportuno certificare la discalculia?



I terapeuti non certificano la Discalculia prima della fine del 3° anno della scuola primaria, in modo che gli apprendimenti siano ben consolidati. Il livello intellettuale deve essere nei limiti della norma, non inferiore al valore 85.

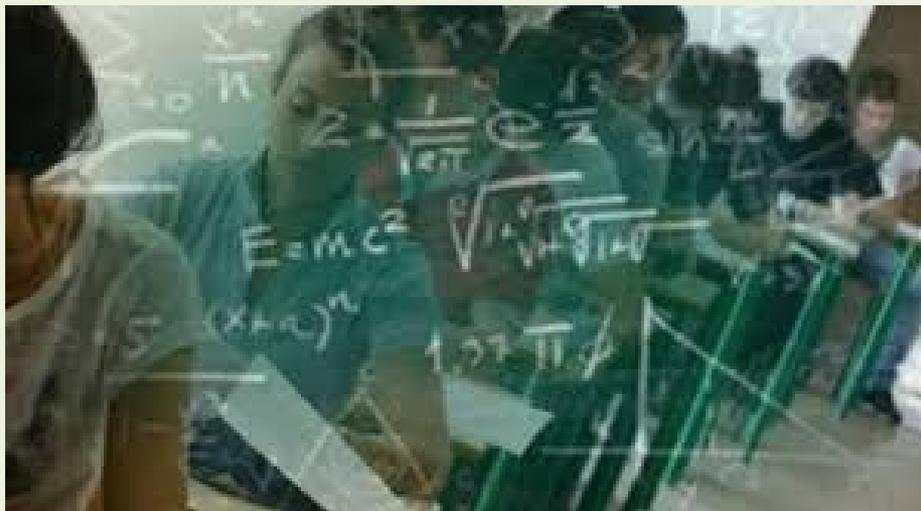
# Non tutti i ragazzi con DISCALCULIA vengono riconosciuti entro la terza classe della scuola primaria!

Anche la scuola secondaria ha il compito di verificare se gli studenti che dimostrano difficoltà in questo ambito siano da indirizzare ai servizi per eventuali valutazioni.



# Qual è l'incidenza di tale disturbo nella popolazione scolastica?

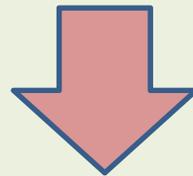
- Secondo l'International Academy for Research in Learning Disabilities solo il **2,5%** della popolazione scolastica mostrerebbe **difficoltà matematiche** (25 su 1000) in commorbidità con altri disturbi e soltanto lo **0,5%** mostrerebbe **discalculia evolutiva vera e propria** (5 su 1000).



# Situazione in Italia nella scuola primaria

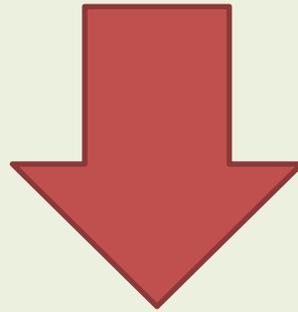
Mediamente su una classe di 25 alunni si hanno

- 5 bambini per classe con **difficoltà di calcolo**
- 5-7 bambini per classe con **difficoltà di soluzione dei problemi**



**e sono più del 20% della popolazione scolastica**

# **Alla fine della scuola superiore**



## **Solo il 20% ha adeguate capacità di calcolo**

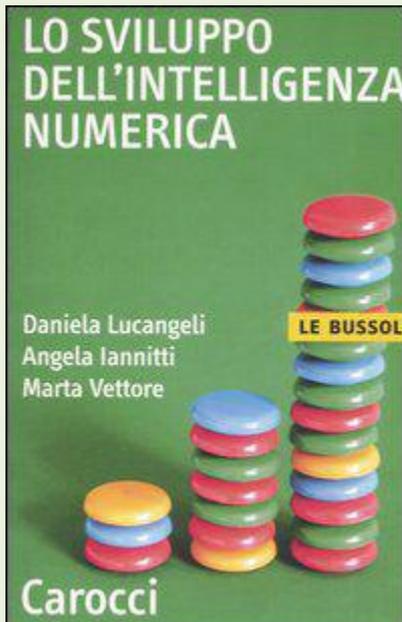
# INTELLIGENZA NUMERICA

Intelligere (comprendere, apprendere) attraverso la quantità

Oggi la ricerca ci dice che

È innata

potenziamento tramite istruzione dei processi dominio specifici



# Meccanismi dominio-specifici

## Meccanismi Semantici

(regolano la comprensione della quantità)

(3 = )

## Meccanismi Lessicali

(regolano il nome del numero)

(1 – 11- 23)

## Meccanismi Sintattici

(Grammatica Interna = Valore Posizionale delle Cifre)

Esempio	da U	la posizione
	1 3	cambia nome
	3 1	e semante

# DISCALCULIA EVOLUTIVA

## TIPOLOGIE (C. Temple 1991)

Dislessia per le cifre	Discalculia procedurale	Discalculia per i fatti aritmetici
Incompetenza lessicale sia in comprensione che in produzione	Difficoltà nell'acquisizione di procedure o algoritmi di calcolo	Difficoltà nell'immagazzinamento di fatti numerici
Errori di lessico -vede 4 e pronuncia 7 -pensa 15 e pronuncia 13 Errori di sintassi -vede 30 e pronuncia 300 -vede 31 e lo considera uguale a 13	Errori nell' <b>acquisizione</b> e nell' <b>applicazione</b> delle procedure e degli algoritmi implicati nel sistema di calcolo <u>La soluzione di problemi e la geometria richiedono operazioni di calcolo.</u>	Risulta compromessa l'acquisizione dei <u>fatti numerici</u> all'interno del <b>sistema di calcolo</b> (vedi tabelline, calcoli a mente automatizzati tipo $8+2$ , non impara le sequenze all'indietro....)

**Non dimentichiamo poi gli errori dovuti alle difficoltà VISUO-SPAZIALI** (per esempio difficoltà nel riconoscimento dei segni di operazione, orientamento nello spazio....)



I MIGLIORI

*Insegnanti*

SONO QUELLI CHE TI INDICANO DOVE

*guardare*

MA NON TI DICONO COSA

*vedere*

# Di che cosa hanno bisogno gli studenti?

Hanno bisogno di **INSEGNANTI**  
che  
**COMPRENDANO LE LORO DIFFICOLTÀ**  
che  
**CONOSCANO LE STRATEGIE**  
**PER AIUTARLI**  
ma  
**che guidino lo studente ad**  
**essere consapevole delle**  
**proprie difficoltà.**

# Ruolo della didattica

**La difficoltà non è nella  
capacità di apprendimento,  
ma nelle capacità di utilizzare  
i normali strumenti per  
accedere all'apprendimento**

# Obiettivo della personalizzazione

## IL PIÙ POTENTE È L'INSEGNANTE !

Aiutare i ragazzi a sfruttare al meglio le risorse disponibili

Non metterli di fronte a richieste frustranti

Costruire un PDP che sia veramente personalizzato, scaturito dall'osservazione continua delle modalità di apprendimento specifiche del singolo studente, condiviso con la famiglia che ben conosce le difficoltà quotidiane



# Ma ricordiamo che..

## **OGNI DISCALCULIA HA UNA STORIA!**

### **Ogni alunno va aiutato con modalità diverse**

i profili di discalculia evolutiva ci permettono di trarre informazioni e capire come fare per essere efficaci nell'aiuto

- Occorre quindi riconoscere i **PRESUPPOSTI TEORICI** in modo di poter innestare le potenzialità compensative nel percorso di apprendimento
- E poi è necessario conoscere le **POTENZIALITÀ COMPENSATIVE** degli strumenti per un uso corretto delle compensazioni.

# Quali interventi posso attuare?

È necessario distinguere tra:

<b>COMPENSARE</b>	<b>RIABILITARE/POTENZIARE</b>	<b>DISPENSARE</b>
Procedo con l'introduzione di compensazione STRUMENTI, STRATEGIE, TECNOLOGIE	Aspetto carente	La difficoltà esiste! Non investo, non lavoro
Se ti lascio usare strumenti compensativi non significa RIDURRE la difficoltà	Procedo con l'introduzione di esercizio mirato	Procedo per evitare quelle nozioni e quelle richieste che la difficoltà specifica incontra
Investo e lavoro su funzioni o aspetti efficienti, sulle funzioni integre non in difficoltà	Investo e lavoro su funzioni o aspetti carenti	La difficoltà è tale da coinvolgere i livelli motivazionali e mal gestita diventa un insuccesso formativo su tutto il percorso scolastico

# COMPENSARE

# Il primo strumento compensativo in assoluto, il più potente di tutti!



# ....e poi?



# Programmi per PC

**MateXme** è un programma che permette di calcolare: mcm, MCD, numeri primi, equivalenze. Ha anche la calcolatrice. Il programma richiede che siano installate le voci Microsoft Speech Platform 11.0, quelle distribuite con LeggiXme\_SP e LeggiXme\_USB.

Il "pezzo forte" è **IncolonnAbili**, un piccolo software, nato dalla collaborazione con Luciana Lenzi ed Enrico Angleo Emili di Bologna.

Si tratta della possibilità di stampare "etichette" personalizzabili per aiutare nell'esecuzione delle operazioni aritmetiche. Cliccando sul pulsante Info si accede ad un quasi power point con le spiegazioni, specialmente didattiche

Non richiede installazione

Viene poi **LeggiExcelXme**, un componente aggiuntivo per far parlare il foglio di calcolo.

Per utilizzarlo:

- 1 - scaricare il file
- 2 - aprirlo con Excel
- 3 - se necessario, attivare le macro
- 4 - salvare con nome come componente aggiuntivo (xla o xlam)
- 5 - chiudere e riaprire Excel
- 6 - dal menu strumenti scegliere componenti aggiuntivi e selezionarlo

da: <https://sites.google.com/site/leggixme/matematica>

**ETICHETTA**

Numeri

Cifre

Misura

**FOGLIO**

Magine alto

Magine sin.

Colonne

Righe

**ORIENTAMENTO**

Verticale

Orizzontale

Elabora Etichetta

Chiudi

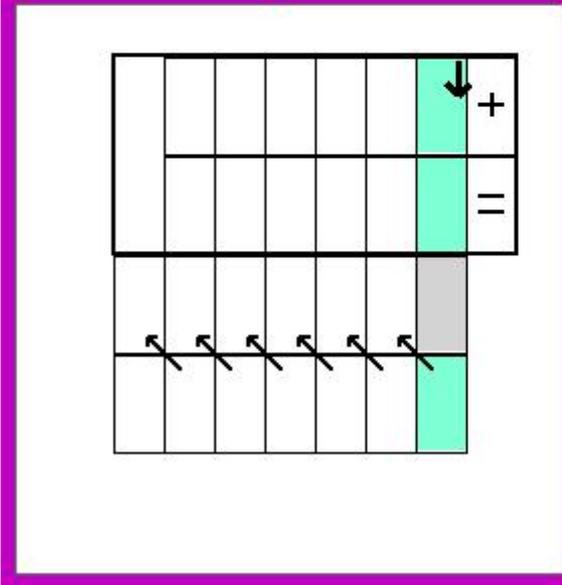
Anteprima Stampa

Salva GIF

SPOSTAMENTO FINE

< > ^ v

**Incolonnabili**



**MateXme**

MateXme - ASSOLO

MENU'

mcm

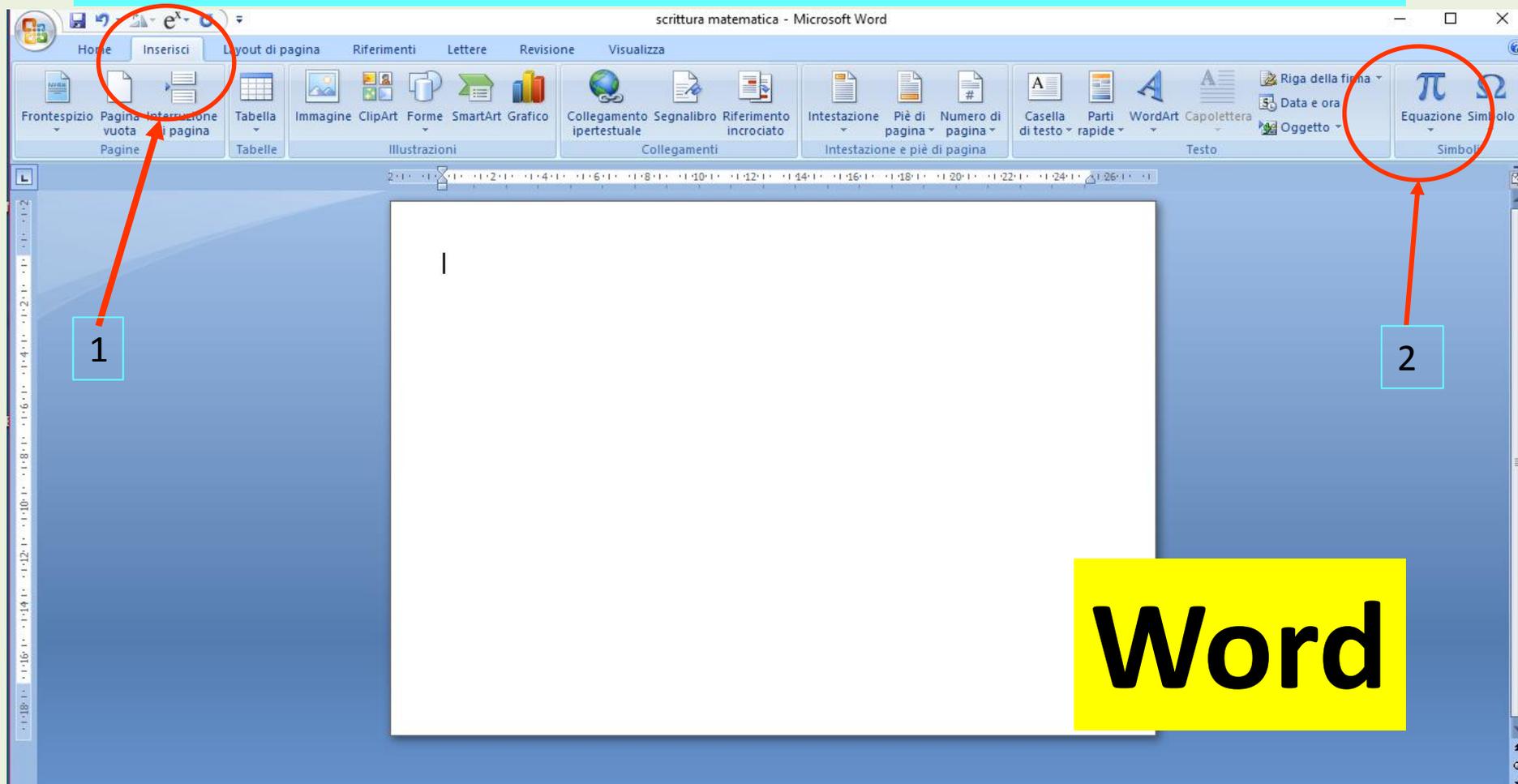
MCD

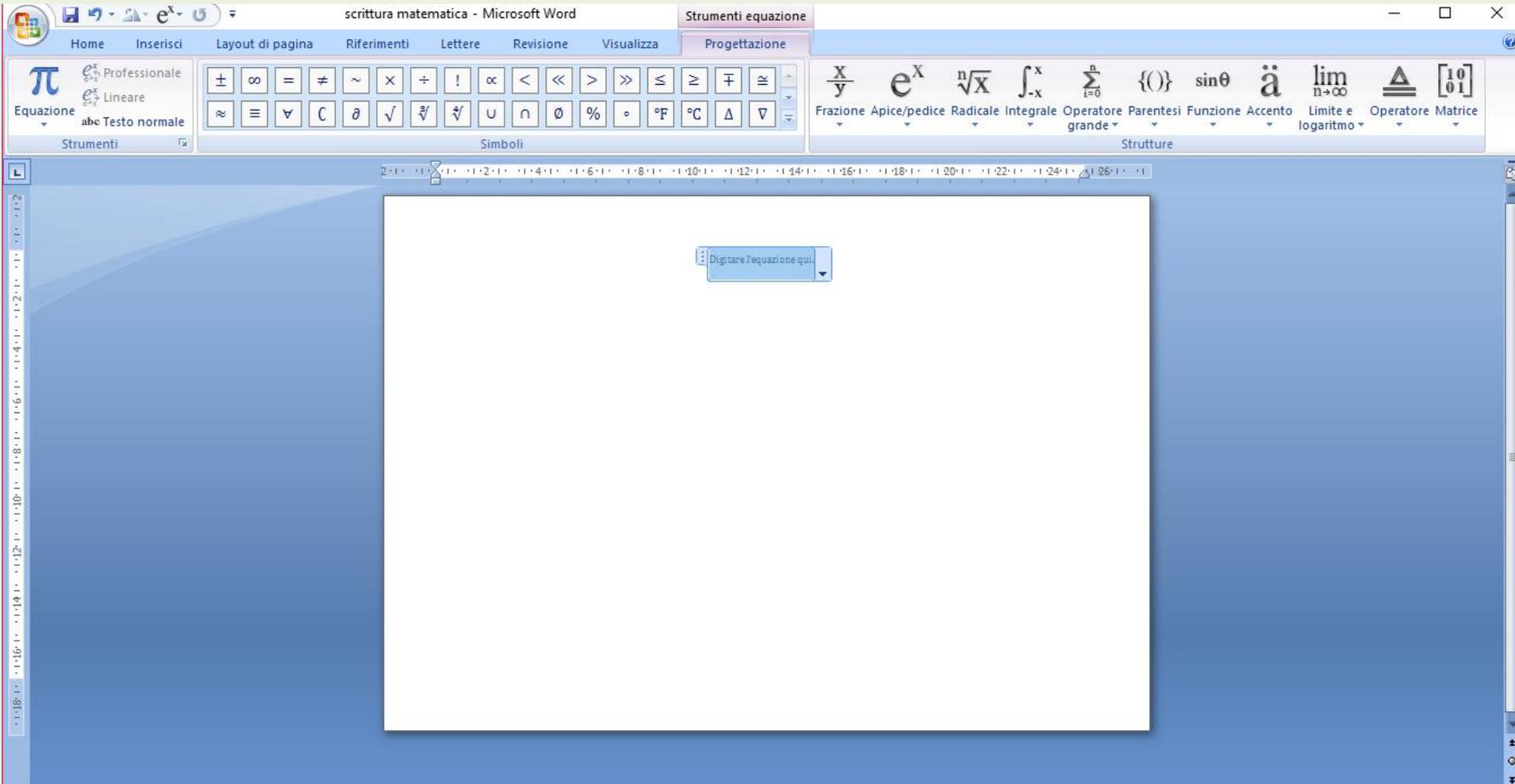
Numeri Primi

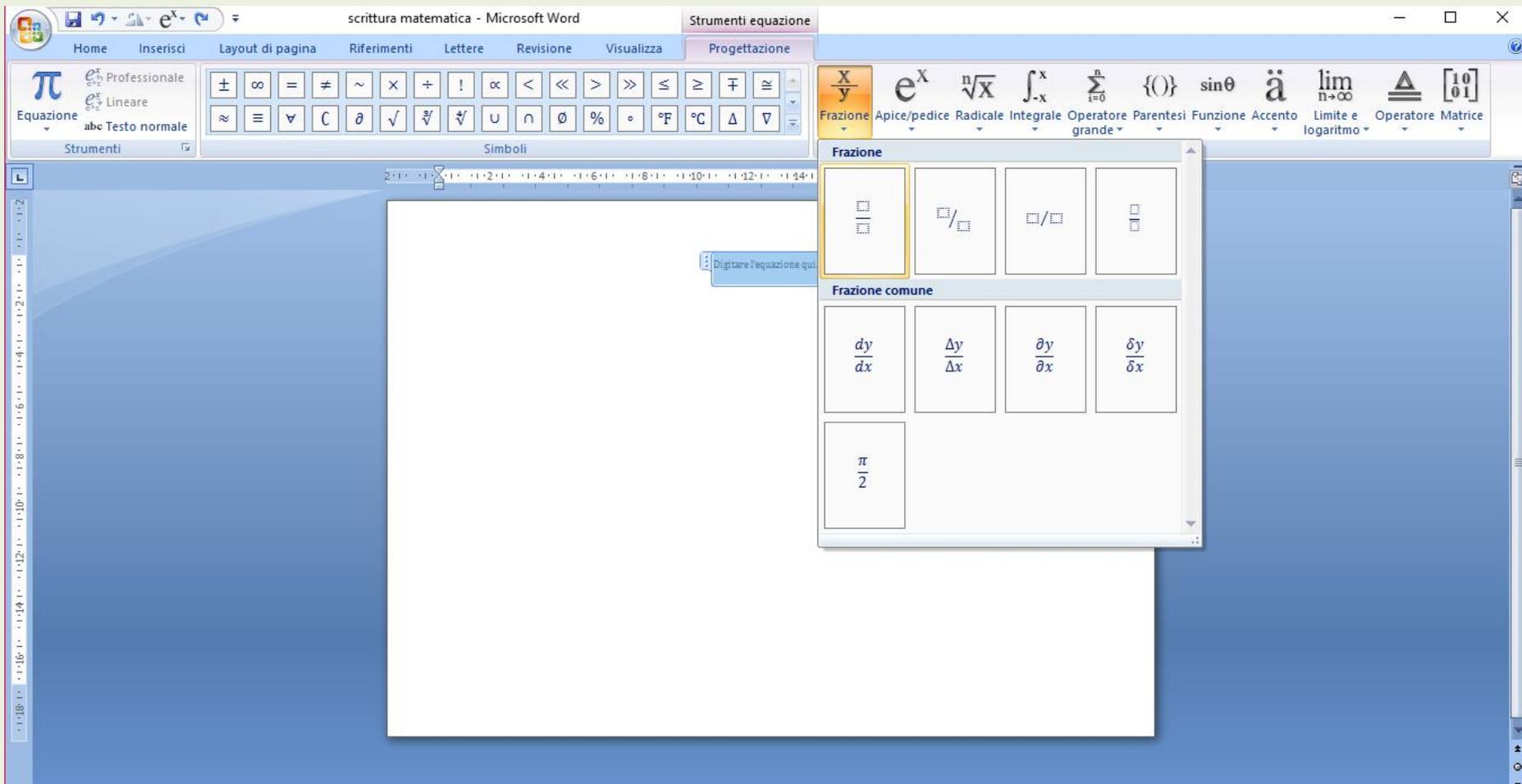
Equivalenze

**Questi sono ottimi strumenti per compensare abilità procedurali deficitarie**

# Per compensare la disgrafia: come scrivere coi simboli matematici







scrittura matematica - Microsoft Word

Home Inserisci Layout di pagina Riferimenti Lettere Revisione Visualizza

Frontespizio Pagina vuota Interruzione di pagina Tabella Immagine ClipArt Forme SmartArt Grafico Collegamento ipertestuale Segnalibro Riferimento incrociato Intestazione Piè di pagina Numero di pagina Casella di testo Parti rapide WordArt Capolettera Riga della firma Data e ora Oggetto

Equazione Simbolo

Area del cerchio

$$A = \pi r^2$$

Espansione di Taylor

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

Formula quadratica

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Identità trigonometrica 1

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

Identità trigonometrica 2

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$\pi$  Inserisci nuova equazione

$\pi$  Salva selezione nella raccolta equazioni...

$\frac{2}{3}x^2 - 6x + 11 = 0$

# App per Tablet e Smartphone

**Geometria**

- Geometria
- Algebra
- Trigonometria
- Equazioni
- Geometria analitica
- Derivazione
- Integrazione
- Matrici
- Statistica

**Geometria**

- Triangolo
- Triangolo Rettangolo
- Quadrato
- Rettangolo
- Parallelogramma
- Losanga
- Trapezio
- Quadrilatero Convesso
- Cerchio
- Segmento Circolare

**TRIANGOLO RETTANGOLO**

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$$
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$
$$a^2 = BH \cdot c, \quad b^2 = AH \cdot c$$
$$h^2 = AH \cdot BH$$

**QUADRATO**

$$P = 4 \times a$$
$$A = a^2$$
$$d = a \times \sqrt{2}$$

**RETTANGOLO**

$$P = (a + b) \times 2$$

**Formule Free**

### POTENZE

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \dots a}_m$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, (b \neq 0)$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad a^0 = 1, (a \neq 0)$$

$$(a \cdot b)^m = a^m b^m \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}, (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

### RADICI

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m} \\ &= a^{\frac{m}{n}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, (b \neq 0) \end{aligned}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \sqrt[n]{a^m} \sqrt[b]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m b^n}$$

### LOGARITMO DECIMALE

$$\log_{10} N = \lg N \quad (b = 10)$$

$$\lg N = x \Leftrightarrow 10^x = N$$

### LOGARITMO NATURALE

$$\log_e N = \ln N$$

$$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828 \dots$$

### 6. NUMERI COMPLESSI

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i,$$

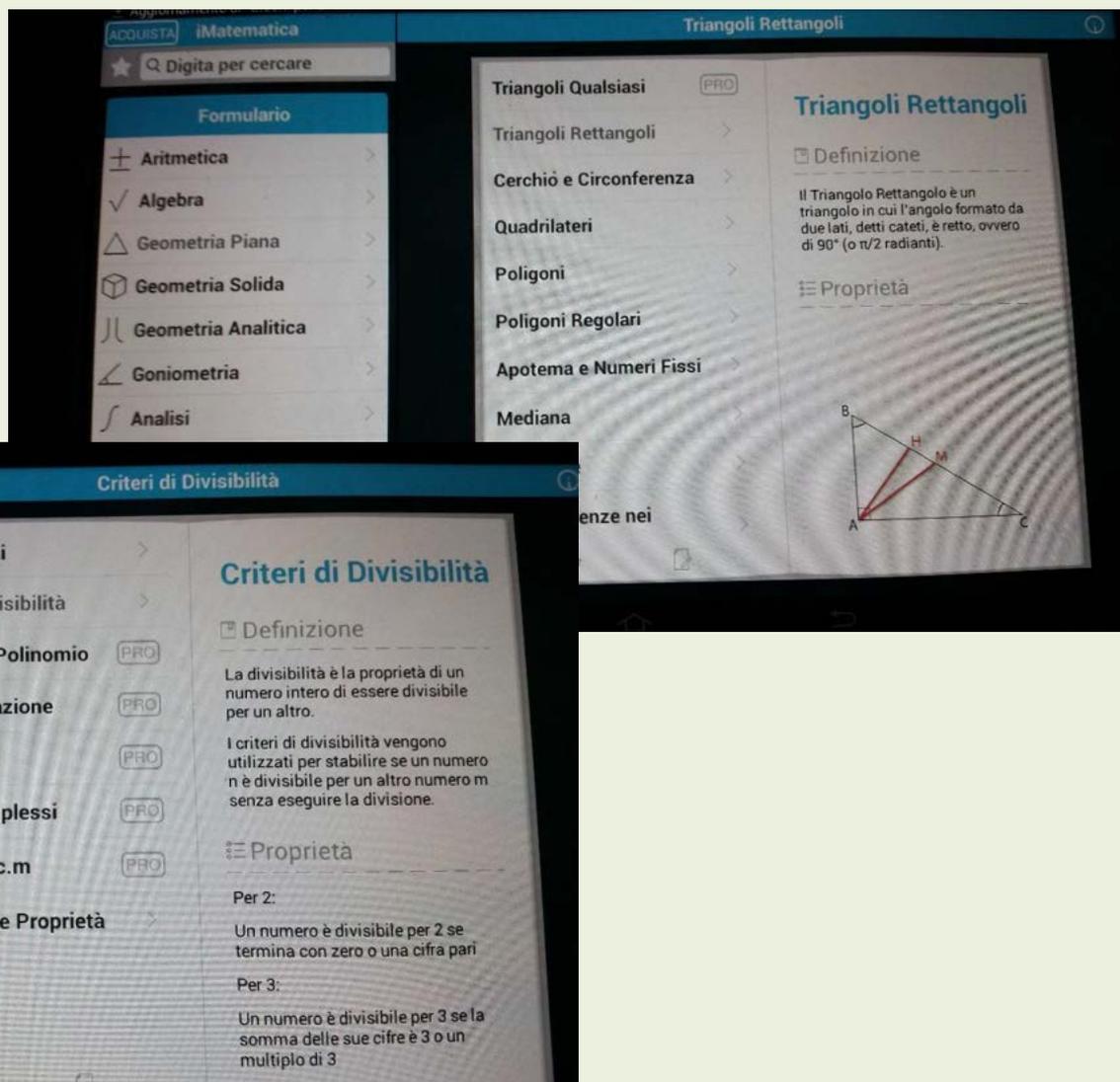
$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1, \dots, i^{4n} = 1,$$

$$i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$



# iMatematica

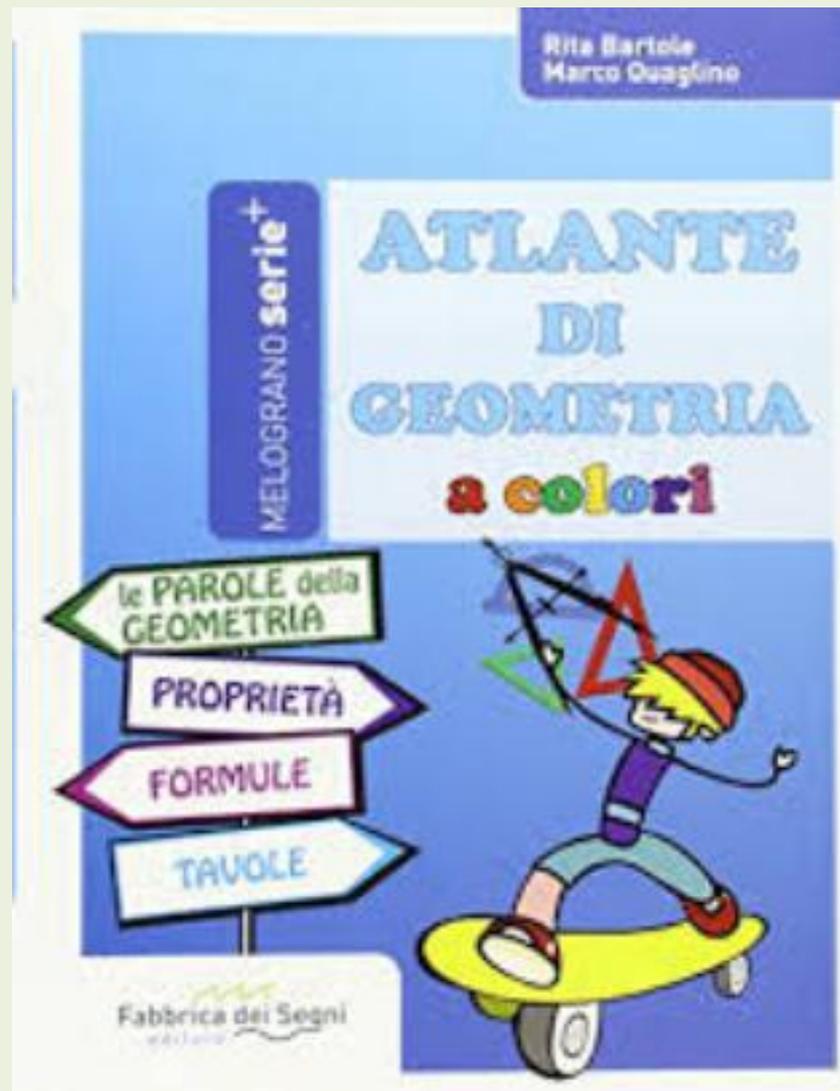


# Tabelle, formulari, mappe...

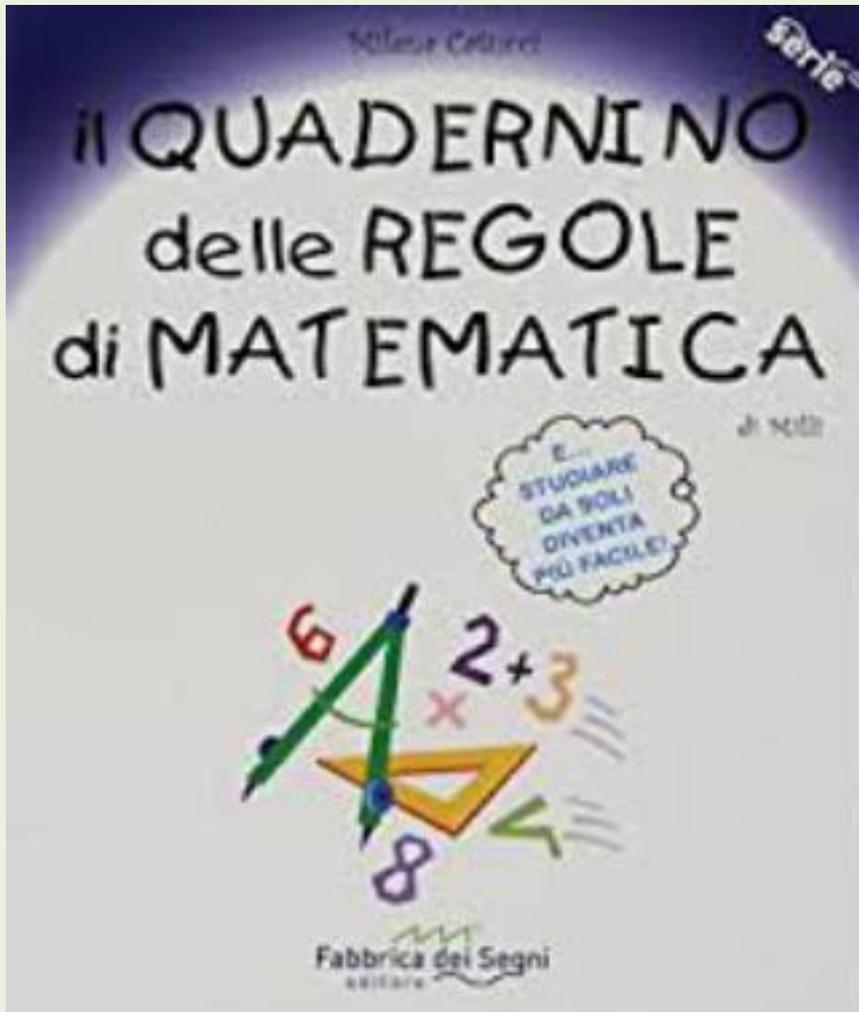
- Lo studente che ha difficoltà nella memorizzazione delle procedure dovrà avere la possibilità di utilizzare questi strumenti, spesso corredati di esempi
- Lo studente deve essere educato alla scelta dei materiali appropriati e deve essere consapevole che non tutto quello che trova in rete è adatto per lui
- **La soluzione migliore sarebbe che lo strumento fosse la conclusione di un percorso di apprendimento, in questo modo sarebbe sicuramente personalizzato**
- L'insegnante può semplificare il contenuto delle lezioni mediante la costruzione di apposito materiale per lo studio

# Schede di geometria

**Scuola primaria,  
secondaria di  
primo grado e  
biennio superiore**



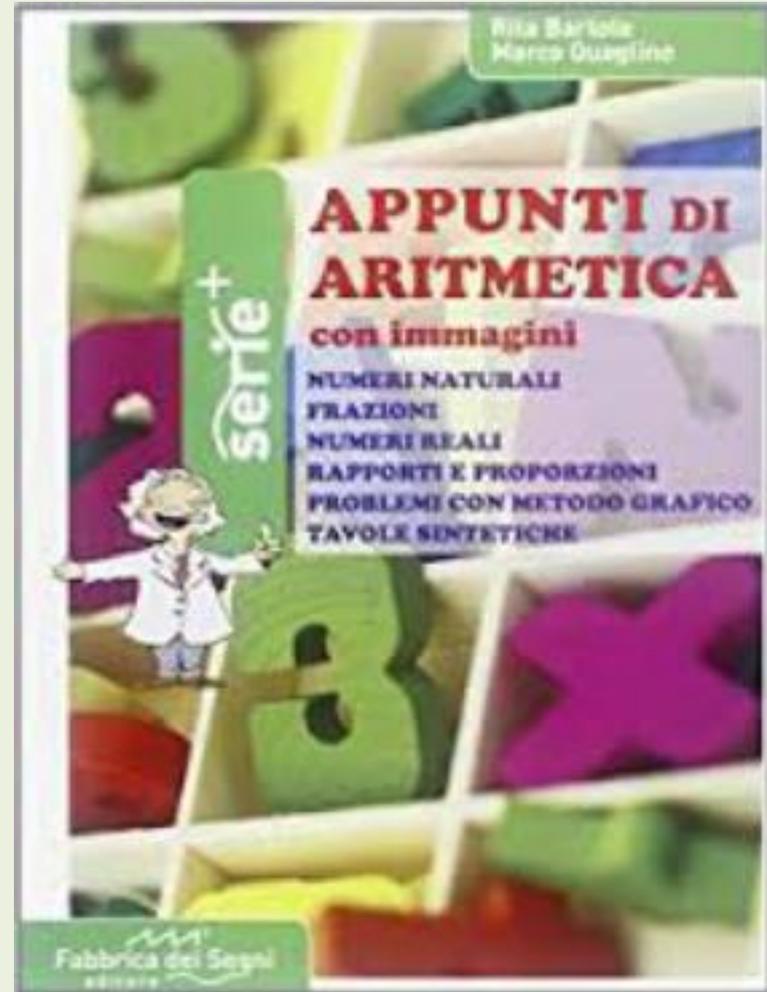
# Prima matematica



**Scuola primaria**

# Aritmetica

**Scuola primaria,  
secondaria di  
primo grado**





# Algebra



**Scuola secondaria  
di primo grado e  
biennio superiore**

## CALCOLO LETTERALE – I MONOMI

**Monomio:** espressione letterale che non contiene addizioni e sottrazioni

È composto da: **segno**, **coefficiente** (numero) e **parte letterale** (lettere). Il segno + e il coefficiente 1 si possono sottintendere.

$$+\frac{2}{3}a^2b$$

Definizioni e esempi

Di cosa ci occupiamo?	Definizione	Esempio			
Monomio intero	<u>Non</u> compaiono lettere al denominatore	$\frac{1}{2}c^3$			
Monomio frazionario	Compaiono lettere al denominatore	$\frac{3b}{a^2}$			
Grado del monomio rispetto ad una lettera	È l'esponente della lettera che si prende in considerazione	$4a^2b$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>Rispetto alla lettera a: 2</td> </tr> <tr> <td>Rispetto alla lettera b: 1</td> </tr> <tr> <td>Rispetto alla lettera c: 0</td> </tr> </table>	Rispetto alla lettera a: 2	Rispetto alla lettera b: 1	Rispetto alla lettera c: 0
Rispetto alla lettera a: 2					
Rispetto alla lettera b: 1					
Rispetto alla lettera c: 0					
Grado complessivo del monomio	È la somma degli esponenti di tutte le lettere che compongono la parte letterale	$4 \cdot 3^2 a^3 b^5 c$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>Grado complessivo: <math>3 + 5 + 1 = 9</math></td> </tr> </table>	Grado complessivo: $3 + 5 + 1 = 9$		
Grado complessivo: $3 + 5 + 1 = 9$					
Monomi simili	Hanno uguale parte letterale (stesse lettere e lettere uguali hanno esponenti uguali)	$3a^2b$ $-5a^2b$			
Monomi uguali	Monomi simili con uguale coefficiente	$4a^3b^2$ $4a^3b^2$			
Monomi opposti	Monomi simili con coefficienti opposti (uno a segno contrario dell'altro)	$4a^3b^2$ $-3a^3b^2$			

Scheda preparata dall'insegnante, compilata insieme in aula informatica in modo di imparare a scrivere col pc anche formule matematiche, utilizzata come materiale di studio

## PRODOTTI NOTEVOLI

Si tratta di metodi più veloci per risolvere alcuni particolari prodotti di polinomi

Tipo di prodotto notevole	Regola	Esempio	ANNOTAZIONI
Somma per differenza di due monomi	$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$	$(2x + 3)(2x - 3) = [(2x)^2 - (3)^2] = 4x^2 - 9$ $(2a - 5b)(5b + 2a) = [(2a)^2 - (5b)^2] = 4a^2 - 25b^2$	
Quadrato di binomio	$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$	$(3x^3 + 5y^2)^2 = (3x^3)^2 + 2 \cdot (3x^3)(5y^2) + (5y^2)^2 = 9x^6 + 30x^3y^2 + 25y^4$ $(3x^3 - 5y^2)^2 = (3x^3)^2 - 2 \cdot (3x^3)(5y^2) + (5y^2)^2 = 9x^6 - 30x^3y^2 + 25y^4$	
Quadrato di trinomio	$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA$	$(2x - 1 + 3y)^2 = (+2x)^2 + (-1)^2 + (+3y)^2 + 2 \cdot (+2x)(-1) + 2 \cdot (-1)(+3y) + 2 \cdot (+2x)(+3y) = 4x^2 + 1 + 9y^2 - 4x - 6y + 12xy$	
Cubo di binomio	$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	$(2x + 3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3 \cdot 2x(3y)^2 + (3y)^3 = 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 3y + 6x \cdot 9y^2 + 27y^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ $(2x - 3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(-3y) + 3 \cdot 2x(-3y)^2 + (-3y)^3 = 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot (-3y) + 6x \cdot (+9y^2) + (-27y^3) = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$	

# Materiali costruiti dal docente

## SCOMPOSIZIONI IN FATTORI DI UN POLINOMIO

$P(x)$ polinomio di grado $n$	B I N O M I O  T R I N O M I O  4 M O N O M I  6 M O N O M I	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $4x^2 - 25y^4 = (2x)^2 - (5y^2)^2 = (2x - 5y^2)(2x + 5y^2)$	DIFFERENZA DI QUADRATI
<p style="text-align: center;"><b>RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE</b></p> $ax + ay = a \left( \frac{ax}{a} + \frac{ay}{a} \right) = a(x + y)$ $2x^3 - 6x^2 - 14x^4 = 2x^2 \left( \frac{2x^3}{2x^2} - \frac{6x^2}{2x^2} - \frac{14x^4}{2x^2} \right)$ $= 2x^2(x - 3 - 7x^2)$ <p>La quantità che si raccoglie a fattor comune è il MCD dei monomi che compongono il polinomio</p>		$a^2 + b^2$ <b>IRRIDUCIBILE</b>	SOMMA DI QUADRATI
<p style="text-align: center;"><b>RACCOGLIMENTO A FATTOR PARZIALE</b></p> $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$ <p>Nel primo passaggio si sono creati dei gruppi che avevano dei termini in comune, nel secondo passaggio si sono effettuati due diversi raccoglimenti a fattor comune ("legati" sempre da un segno +), nel terzo passaggio si è fatto un raccoglimento a fattor comune sui due gruppi che si sono formati (divisi dal segno evidenziato)</p>	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $8x^3 - 1 = (2x)^3 - (1)^3 = (2x - 1)[(2x)^2 + 2x \cdot 1 + (1)^2]$ $= (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$	DIFFERENZA DI CUBI	
	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $8x^3 + 1 = (2x)^3 + (1)^3 = (2x + 1)[(2x)^2 - 2x \cdot 1 + (1)^2]$ $= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$	SOMMA DI CUBI	
	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ $x^4 + 6x^2y + 9y^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3y + (3y)^2 = (x^2 + 3y)^2$	QUADRATO DI BINOMIO	
	$1x^2 + sx + p = (x + a)(x + b) \quad s = a + b \quad p = a \cdot b$ $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) \quad s = (-3) + (-2) \quad p = (-3) \cdot (-2)$ Ricordiamoci che i numeri $a$ e $b$ sono numeri interi ( $\mathbb{Z}$ ) e che per la loro ricerca <u>si parte sempre dal prodotto</u>	TRINOMIO NOTEVOLE	
	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$	CUBO DI BINOMIO	
	$8a^3 - 12a^2 + 6a - 1 = (2a)^3 + 3(2a)^2 \cdot (-1) + 3(2a)(-1)^2 + (-1)^3$ $= (2a - 1)^3$	CUBO DI BINOMIO	
	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$	QUADRATO DI BINOMIO	
	$a^2 + 4b^2 + 9 - 4ab + 6a - 12b = (a - 2b + 3)^2$ 	QUADRATO DI TRINOMIO	

## Equazioni di secondo grado

formule risolutive			
equazione	nome	procedimento	soluzioni o radici
$ax^2 + bx + c = 0$	equazione completa	si applica la formula completa	$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$ax^2 + bx + c = 0$	equazione completa con <b>b pari</b>	si applica la formula ridotta	$x = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$
$ax^2 + c = 0$	equazione pura $b = 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si isola <math>x^2</math></li> <li>si estrae la radice quadrata algebrica</li> </ul>	$x^2 = -c/a$ $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ $x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$ax^2 + bx = 0$	equazione spuria $c = 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si raccoglie la <math>x</math></li> <li>si applica la legge di annullamento del prodotto</li> </ul>	$x(ax + b) = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 = 0$	equazione monomia	ha sempre due soluzioni nulle	$x_1 = x_2 = 0$

 le soluzioni di una equazione sono dette anche **radici** dell'equazione

significato del delta $\Delta = b^2 - 4ac$								
un'equazione di 2° grado ammette sempre due soluzioni che sono distinte, coincidenti o non reali secondo il segno del $\Delta$								
$\Delta > 0$	$x_1 \neq x_2$	soluzioni reali e distinte	$\Delta = 0$	$x_1 = x_2$	soluzioni reali e coincidenti	$\Delta < 0$	$\emptyset$	soluzioni non reali (o complesse)

proprietà	
$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	è la relazione tra la <b>somma</b> delle soluzioni e i coefficienti dell'equazione di II grado. Si applica solo se $\Delta \geq 0$
$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$	è la relazione tra il <b>prodotto</b> delle soluzioni e i coefficienti dell'equazione di II grado. Si applica solo se $\Delta \geq 0$
$x^2 - sx + p = 0$	serve per scrivere il <b>tratto</b> dell'equazione di II grado quando si conosce la somma e il prodotto delle soluzioni
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	serve a scomporre un trinomio di II grado dove $x_1$ e $x_2$ sono le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$

regola di Cartesio: segno delle soluzioni	
$\underbrace{+ax^2}_{\text{permanenza}} \underbrace{+bx}_{\text{variazione}} - c = 0$ <p style="text-align: center;">(-)                      (+)</p>	la regola di Cartesio permette di trovare il segno delle soluzioni di una equazione di II grado. Si può applicare solo se $\Delta \geq 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>si osservano i segni dei coefficienti <math>a, b, c</math></li> <li>ad ogni permanenza corrisponde una soluzione negativa</li> <li>ad ogni variazione corrisponde una soluzione positiva</li> </ul>

**Mappa  
sovraabbondante  
e caotica da  
rielaborare**

EQUAZIONI DI II° GRADO forma completa	
$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$	$5x^2 - 4x - 1 = 0$ $a = 5, b = -4, c = -1$
discriminante o delta $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 16 + 20 = 36$
formula risolutiva $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 5} = \frac{+4 \pm 6}{10}$ $x_1 = \frac{+4 - 6}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$ $x_2 = \frac{+4 + 6}{10} = \frac{+10}{10} = +1$
<p>considerazioni sul discriminante</p> <p><math>\Delta &gt; 0</math> 2 soluzioni reali distinte <math>x_1 \neq x_2</math></p> <p><math>\Delta = 0</math> 2 soluzioni reali coincidenti <math>x_1 = x_2</math></p> <p><math>\Delta &lt; 0</math> 2 soluzioni non reali <math>\nexists x_1, x_2 \in \mathbb{R}</math></p>	<p><math>\Delta &gt; 0</math></p> <p><math>-x^2 - 4x + 5 = 0</math> <math>a = -1, b = -4, c = +5</math> <math>\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (+5) = 16 + 20 = 36</math> <math display="block">x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{+4 \pm 6}{-2}</math> <math>x_1 = \frac{+4 - 6}{-2} = \frac{-2}{-2} = +1</math> <math>x_2 = \frac{+4 + 6}{-2} = \frac{+10}{-2} = -5</math></p>
	<p><math>\Delta = 0</math></p> <p><math>4x^2 - 12x + 9 = 0</math> <math>a = 4, b = -12, c = +9</math> <math>\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (+9) = 144 - 144 = 0</math> <math display="block">x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{+12 \pm 0}{8}</math> <math>x_1 = x_2 = \frac{+12}{8} = +\frac{3}{2}</math></p>
	<p><math>\Delta &lt; 0</math></p> <p><math>5x^2 + 13x + 10 = 0</math> <math>a = 5, b = +13, c = +10</math> <math>\Delta = (+13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (+10) = 169 - 200 = -31</math> Quando il <math>\Delta</math> è negativo, <u>non si procede al calcolo delle soluzioni</u> perché non esistono reali!</p>

Nozioni di teoria

Esempi

EQUAZIONI DI II° GRADO forma incompleta			
$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$			
<b>Nozioni di teoria</b>	<b>equazione monomia</b> $b = c = 0$ $ax^2 = 0$	<p style="color: red; text-align: center;"><b>Caratteristiche delle soluzioni</b></p> <p style="text-align: center;">2 soluzioni nulle  <math>x_1 = x_2 = 0</math></p>	<p>Ex 1: <math>-3x^2 = 0</math>  <math>a = -3, b = 0, c = 0</math>  <math>x_1 = x_2 = 0</math></p> <p>Ex 2: <math>4x^2 = 0</math>  <math>a = 4, b = 0, c = 0</math>  <math>x_1 = x_2 = 0</math></p>
	<b>equazione pura</b> $b = 0$ $ax^2 + c = 0$	<p style="color: red; text-align: center;"><b>Caratteristiche delle soluzioni</b></p> <p style="text-align: center;">Se esistono:            2 soluzioni opposte  <math>x_1 = -x_2</math>  <math>x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}</math>            dove <math>c</math> ed <math>a</math> devono essere  <u>discordi</u></p>	<p>Ex 1: <math>3x^2 - 12 = 0</math>  <math>a = +3, b = 0, c = -12</math>  <math>x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{-12}{3}} = \pm \sqrt{+4} = \pm 2</math></p> <p>Ex 2: <math>4x^2 + 11 = 0</math>  <math>a = +4, b = 0, c = +11</math>  <math>x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{11}{4}} = ????</math></p>
	<b>equazione spuria</b> $c = 0$ $ax^2 + bx = 0$	<p style="color: red; text-align: center;"><b>Caratteristiche delle soluzioni</b></p> <p style="text-align: center;">1 soluzione nulla e una non nulla  <math>x \cdot (ax + b) = 0</math>  <math>x_1 = 0</math>  <math>x_2 = -\frac{b}{a}</math></p>	<p>Ex 1: <math>-4x^2 - 12x = 0</math>  <math>a = -4, b = -12, c = 0</math>  <math>-4x \cdot (x + 3) = 0</math>  <math>x_1 = 0</math>  <math>x_2 = -\frac{-12}{-4} = -3</math></p>
<b>Esempi</b>			

# Esempio di schema-lavoro preparato dall'insegnante da compilare come formulario

## GEOMETRIA SOLIDA E PROPORZIONALITÀ

A.S. 2013/2014  
Classe 3 acconciatura

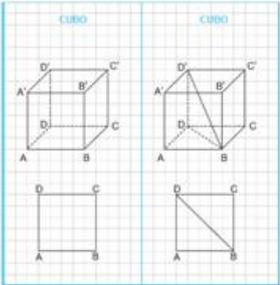
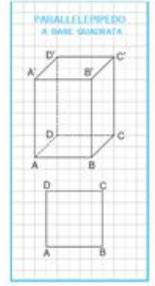
Figura geometrica	Formule	INVERSE
<p><b>CUBO</b></p> 	<p>AREA DI BASE</p> <p>AREA LATERALE</p> <p>AREA TOTALE</p> <p>VOLUME</p>	
<p><b>PARALLELEPIPEDO A BASE QUADRATA</b></p> 	<p>AREA DI BASE</p> <p>AREA LATERALE</p> <p>AREA TOTALE</p> <p>VOLUME</p>	

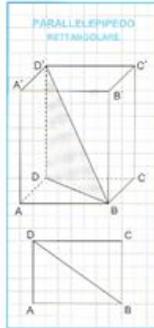
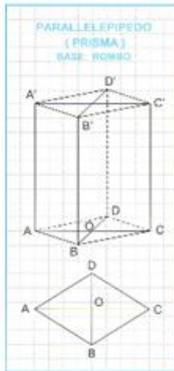
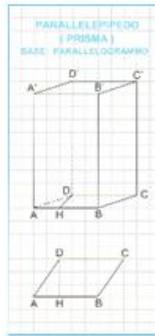
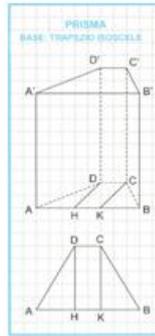
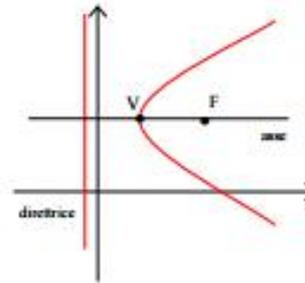
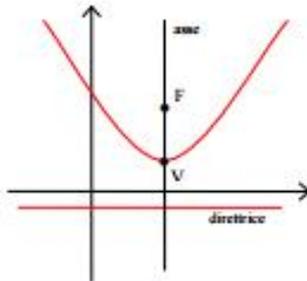
Figura geometrica	Formule	INVERSE
<p><b>PARALLELEPIPEDO RETTANGOLARE</b></p> 	<p>AREA DI BASE</p> <p>AREA LATERALE</p> <p>AREA TOTALE</p> <p>VOLUME</p>	
<p><b>PARALLELEPIPEDO (PRISMA) BASE ROMBO</b></p> 	<p>AREA DI BASE</p> <p>AREA LATERALE</p> <p>AREA TOTALE</p> <p>VOLUME</p>	

Figura geometrica	Formule	INVERSE
<p><b>PARALLELEPIPEDO (PRISMA) BASE PARALLELOGRAMMO</b></p> 	<p>AREA DI BASE</p> <p>AREA LATERALE</p> <p>AREA TOTALE</p> <p>VOLUME</p>	
<p><b>PRISMA BASE TRAPEZIO ISOSCELE</b></p> 	<p>AREA DI BASE</p> <p>AREA LATERALE</p> <p>AREA TOTALE</p> <p>VOLUME</p>	

# Parabola

## definizione

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso  $F$  detto fuoco e da una retta data  $d$  detta direttrice, cioè:  $\overline{PF} = \overline{Pd}$



parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y

parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x

## equazione completa

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = ay^2 + by + c$$

## coordinate del vertice

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

## coordinate del fuoco

$$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

$$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$$

## equazione dell'asse

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$y = -\frac{b}{2a}$$

## equazione della direttrice

$$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$$

$$x = \frac{-1-\Delta}{4a}$$

**Mappa  
sovrabbondante  
da rielaborare**

# Esempio di schema riassuntivo realizzato insieme in classe

## La parabola

La parabola è una conica ed è anche il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F detto **fuoco** e da una retta fissa detta **direttrice** che non lo contiene.  
N.B. Il fuoco e la direttrice non appartengono al luogo geometrico

*Parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate*

<i>Equazione canonica</i>	$y = ax^2 + bx + c$
<i>Vertice</i>	$V \equiv \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$
<i>Fuoco</i>	$F \equiv \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a} \right)$
<i>Asse di simmetria</i>	$x = -\frac{b}{2a}$
<i>Direttrice</i>	$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$

*Casi particolari*

$a > 0$

$a < 0$

$y = ax^2 + c$   
 $b = 0$

$y = ax^2 + bx$   
 $c = 0$

$y = ax^2$   
 $b = c = 0$

**Scriviamo le formule in un modo alternativo che ci consente una più facile memorizzazione:**

# POTENZIARE



Color Memo (Simon)

Sprakelsoft GmbH

3 PEGI 3

INSTALLA

Più di 500,000 di download

Contiene annunci



3,953



Casual



Simili

Memo colore "è un gioco dove si deve ripetere una sequenza di toni e luci!

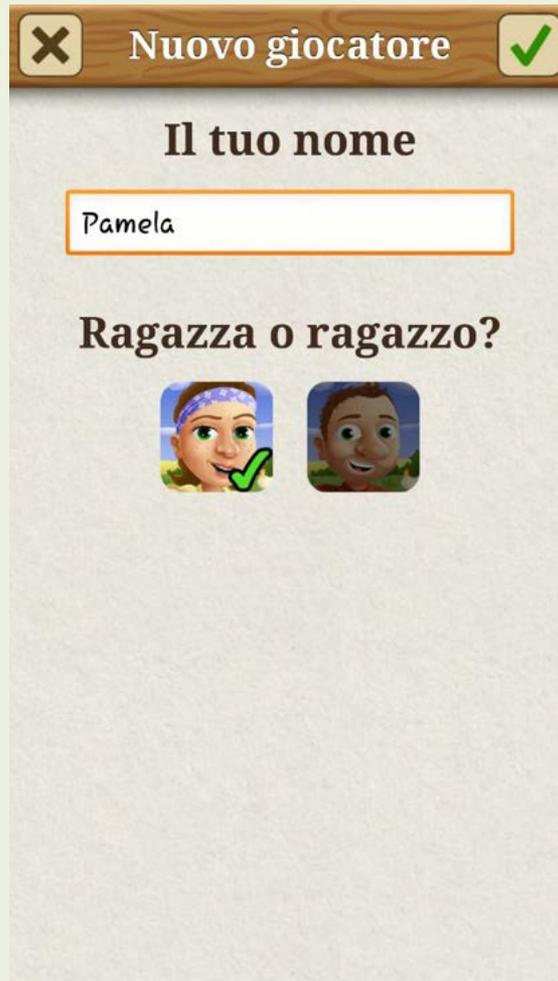
ALTRE INFO



# Per potenziare la memoria



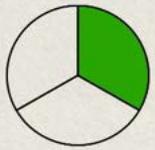
**Quale abilità  
viene  
potenziata?**





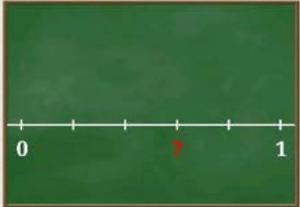
# Vari argomenti da poter scegliere

✕ 1/10 ★★★★★



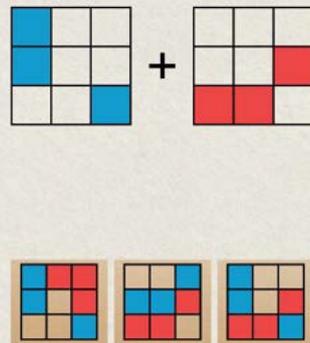
$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$

✕ 1/10 ★★★★★



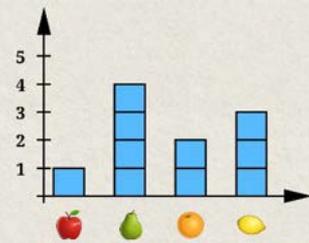
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$

✕ 1/10 ★★★★★



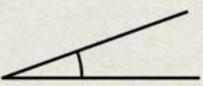
✕ 1/10 ★★★★★

Quante pere?



2	4
1	3

✕ 1/10 ★★★★★

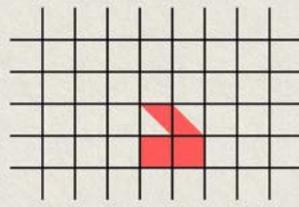


20°	120°
160°	140°

Tante  
possibili  
attività

✕ 1/10 ★★★★★

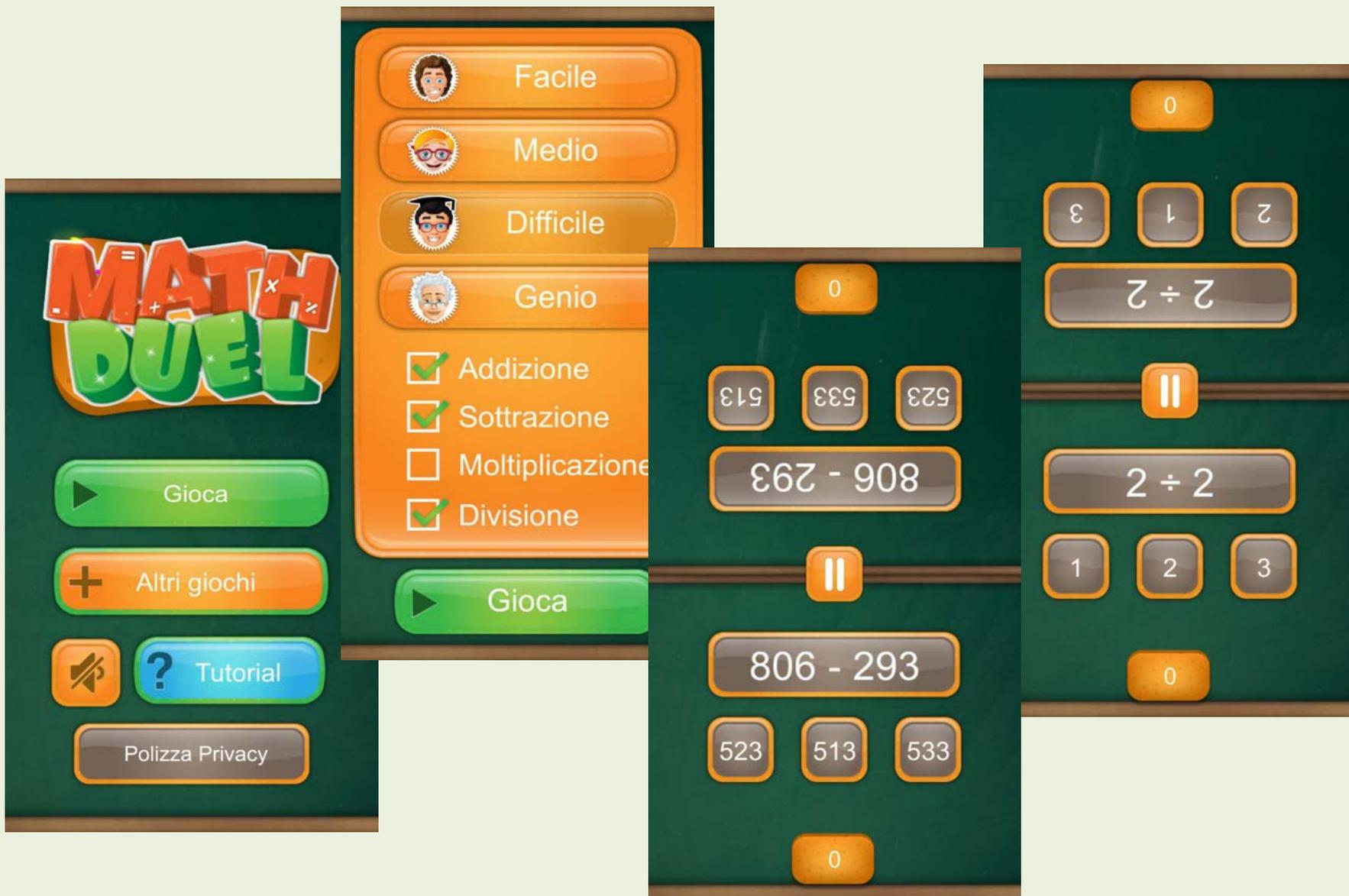
Area nei quadrati?



9	3
7	2



## Per ragazzi più grandi



**DISPENSARE**

# DISPENSARE

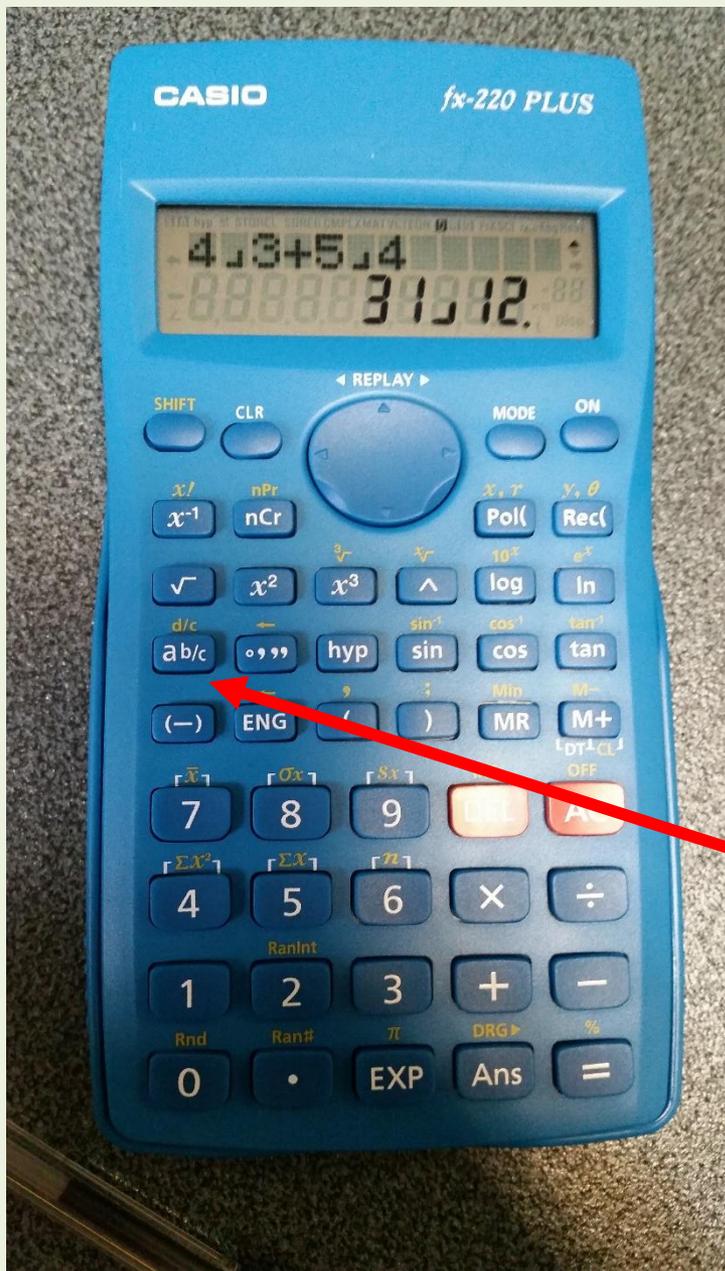
Fraction Calculator by Mathlab \$1.49  
Free from Advertising. Workspaces. Library.

Frazioni PASSA AL PRO!

5/6+8/9

$$\frac{5}{6} + \frac{8}{9} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} + \frac{8 \times 2}{9 \times 2} = \frac{15}{18} + \frac{16}{18} = \frac{15 + 16}{18} = \frac{31}{18} = 1 \frac{13}{18} \approx 1,7222222222222222$$

APP

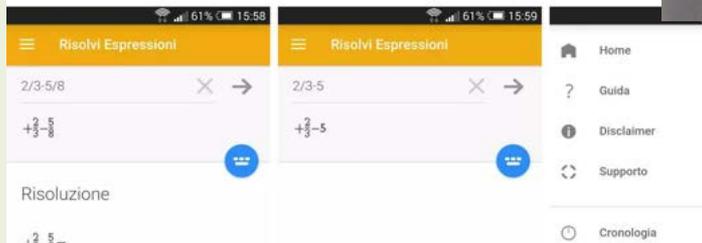
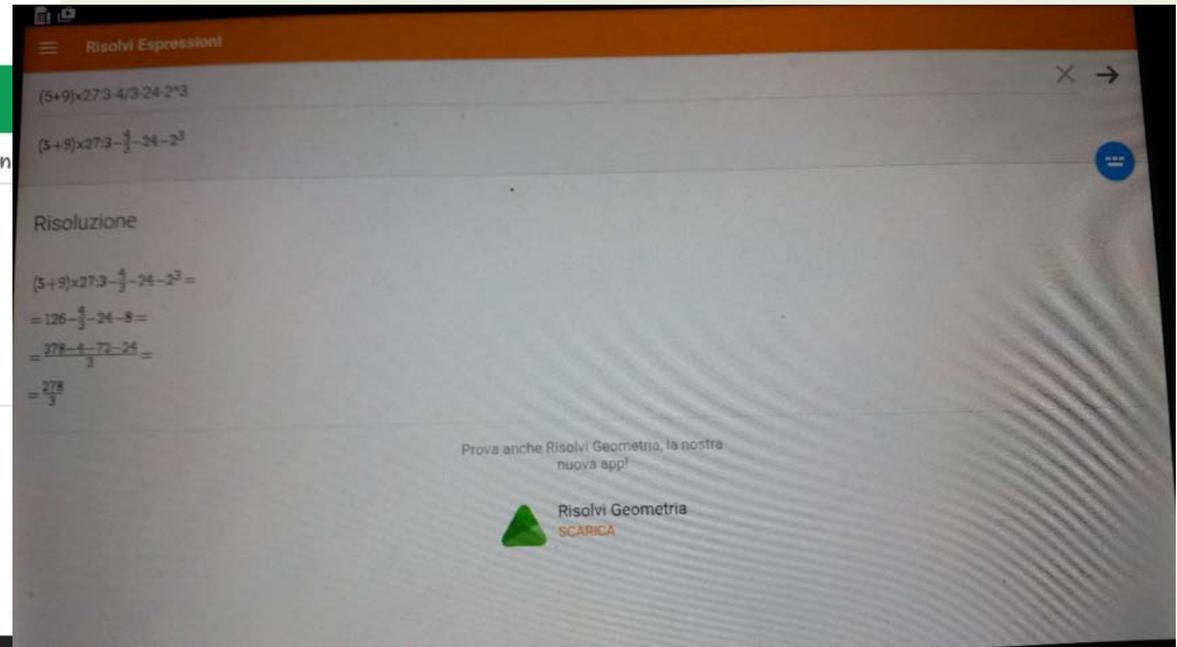


# Classica CALCOLATRICE SCIENTIFICA

**Tasto frazioni**



Da usare con cautela!!!!

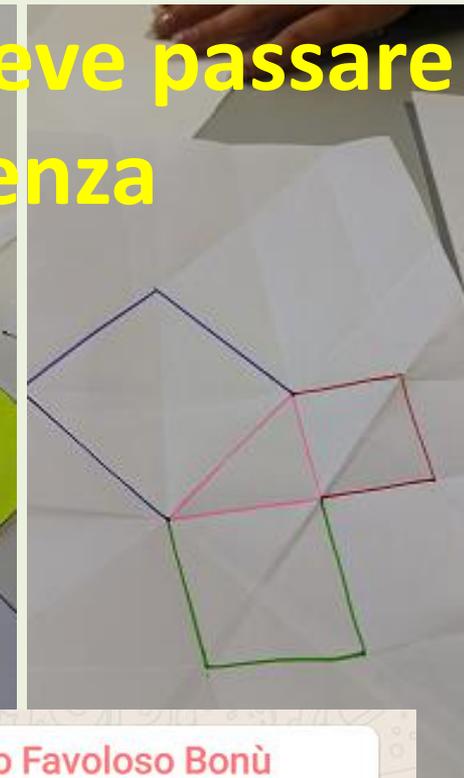
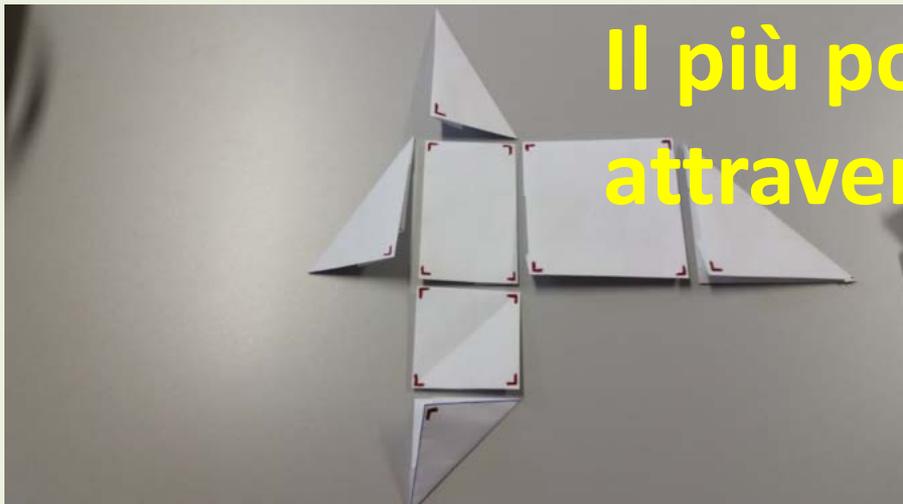


# Come si può strutturare la LEZIONE?



**Studenti e insegnante devono lavorare in armonia e fiducia**

# Il più possibile si deve passare attraverso l'esperienza



...grado di soddisfazione relativo alla comprensione dei concetti visti questa mattina? 13:08 ✓

**Marioara**  
10/10 😂 13:10

**Giada Acosta Alondra**  
9/10 13:11

**Gaia Faustinelli**  
9/10 13:11

**Toni Scuola**  
90% 13:09

**Nicole Vaira**  
8/10 13:10

**Stefano Bellissimo Favoloso Bonù**  
Ah se facciamo geometria starò poi a casa tutti i mercoledì 13:27

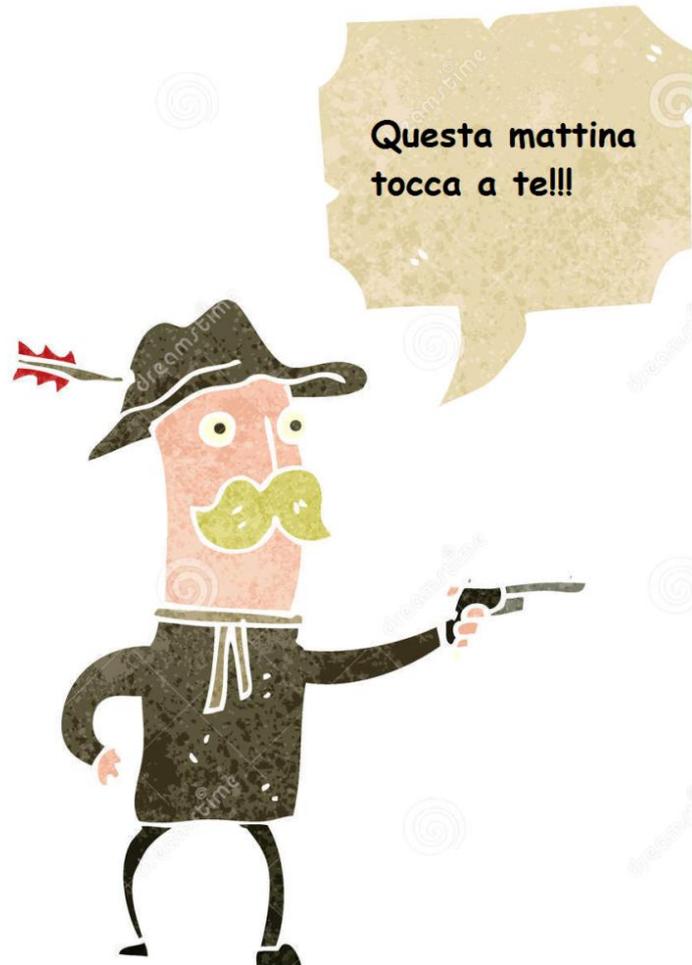
**Giorgia Secula**  
Ma va e stra bello per la prima volta ho capito qualcosa oggi 13:28

Bel metodo sta volta profe 👍 13:28

# VERIFICHE



# Utilizzare prevalentemente verifiche programmate



# ***Errori frequenti***

*Verifiche scritte in modo chiaro e con caratteri più grandi*

***Non vuol dire foglio A3***

*Verifiche ridotte*

***Non vuol dire barrare esercizi***

*Verifiche ridotte e con strumenti*

***Non vuol dire “ti ho già aiutato”***

# **Come si posso valutare gli apprendimenti del gruppo classe?**

## **La valutazione non passa solo attraverso la verifica scritta**

- Il lavoro di gruppo è un ottimo strumento per verificare l'appreso e l'abilità esecutiva di ogni studente: l'insegnante deve solo osservare**
- Fornire allo studente qualche tempo prima della verifica scritta un fax-simile della prova che dovrà sostenere in autonomia serve sicuramente ad abbassare l'ansia da prestazione**
- Test on-line assegnati a casa possono essere un'occasione di valutazione.....quanto meno costringono lo studente anche più svogliato ad aprire i libri!**
- Ogni momento di lavoro è un'occasione per il docente per verificare come e quanto lo studente sta lavorando**

# L'ERRORE!!!

**Per aiutare un alunno in difficoltà occorre imparare a capirne gli ERRORI: questi non vanno "contati" ma "interpretati"**

- Non calcolare gli **errori di calcolo**
- Non calcolare gli **errori di trascrizione**
- Non correggere e non calcolare gli **errori ortografici**
- Non calcolare il **tempo** impiegato
- Tener conto del punto di partenza e dei risultati conseguiti
- Premiare i progressi e gli sforzi
- Comprendere ma anzitutto far comprendere l'errore



$(3a - 2b)(2b - a)$  SNL  
 $+6ab - 4b^2$

**errore procedurale**

- procedura scorretta
- errore di segno

$(3a - 2b)(2b - a)$  SNL  
 $+6ab - 4b^2$

rifacciamo, scriviamo più grande con la procedura ben evidenziata!!!!

$(3a - 2b)(2b - a)$

Errore procedurale: invece di moltiplicare i numeri li somma

$+6ab - 4a^2 + 4b^2 + 3ab$

SNL

~~$(3a-2b)(2b-a)$~~

~~$+6ab-3a^2-4b^2+2ab$~~

$(3a-2b)(2b-a) = +6ab - 3a^2 - 4b^2 + 2ab = +8a^2b^2 - 3a^2 - 4b^2$

~~$+6ab - 3a^2 - 4b^2 + 2ab$~~

**errore procedurale nella somma di monomi simili**

SNL

~~$(3a-2b)(2b-a)$~~

~~$+6ab-3a^2-4b^2+2ab$~~

$(3a-2b)(2b-a) = +6ab - 3a^2 - 4b^2 + 2ab = +8ab - 3a^2 - 4b^2$

~~$+6ab - 3a^2 - 4b^2 + 2ab$~~

**correzione!!!**

$$\left( \frac{-2x^2}{-xy} \right) (2x+y)$$

$$-4x^3 - \cancel{2x^2y} - \cancel{2x^2y} - 1xy^2 = -4x^3 - 1xy^2$$

## Errore di che tipo?

dall'indagine si capisce che l'errore non poteva essere controllato ma che la procedura risolutiva era chiara

- Attenzione! se la temperatura è sotto zero di 2 gradi e poi scende ancora di 2 gradi a quanto arriva?

- 4

- E allora?

- Ma io ho letto + da qualche parte.

**IMPARO COSI' BENE  
DAI MIEI ERRORI...  
CHE OGNI  
GIORNO  
MI RIESCONO  
MEGLIO!**



**MEGLIO!**



# LA VALUTAZIONE

**Di rado i risultati prodotti dagli alunni  
corrispondono alle attese ...**

La valutazione personalizzata e consapevole  
si chiede:

Perché l'alunno ha operato queste scelte procedurali per rispondere alla consegna?

Quale processo di pensiero lo ha guidato?

Quale voto dà ragione dello sforzo profuso?

Una valutazione che tenesse conto del solo punteggio complessivo, non collocherebbe i profili di discalculia, i processi di pensiero e i perché delle scelte effettuate.

Solo i perché, anche se sono scomodi, possono connotare la valutazione di significati e fornire indicazioni utili per una didattica su misura, realmente individualizzata.



ASSOCIAZIONE  
ITALIANA  
DISLESSIA

